Par cinq points passe une conique:

Référence : Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009

Lemme 1 (p.19)**.** *Soit M, N deux points distincts du plan de coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors la droite (MN) a pour équation :* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$

Preuve : On peut supposer tous les coordonnées barycentriques normalisées à somme 1 (ce qui ne modifie pas l'annulation du déterminant ci-dessus). Soit P un point de coordonnées barycentriques (X, Y, Z). Alors $P \in (MN)$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X - x_1 & = & t(x_2 - x_1) \\ Y - y_1 & = & t(y_2 - y_1) \\ Z - z_1 & = & t(z_2 - z_1) \end{array} \right.$$

Comme tous les coordonnées barycentriques ont été normalisées, la dernière ligne vaut moins la somme des deux autres, et donc il suffit que t vérifie le système des deux premières lignes, c'est-à-dire que

$$0 = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 & x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ Z & z_2 & z_1 \end{vmatrix}$$

□

Lemme 2 (p.51)**.** ***(Conique circonscrite)*** *Soient ABC un triangle non plat et $R = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ le repère affine correspondant. L'équation générale en coordonnées barycentriques d'une conique passant par les trois points A, B, C est $pYZ + qZX + rXY = 0$, où p, q, r sont non tous nuls.*

Preuve : Rappelons qu'un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans (ABC) possède comme coordonnées cartésiennes le couple $(u = \frac{y}{x+y+z}, v = \frac{z}{x+y+z})$ (où $x + y + z \neq 0$). Partons de l'équation affine (cartésienne) générale des coniques du plan, sous la forme d'une équation polynomiale du second degré :

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma = 0,$$

où les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont non tous les trois nuls. Substituons U par $\frac{Y}{X+Y+Z}$ et V par $\frac{Z}{X+Y+Z}$. On obtient, l'équation suivante (en multipliant par $(X + Y + Z)^2 \neq 0$) :

$$\mathscr{D}(X, Y, Z) = \alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X + Y + Z) + \gamma(X + Y + Z)^2 = 0.$$

Une conique passe par les points A, B et C si et seulement si

$$\mathscr{D}(1, 0, 0) = \mathscr{D}(0, 1, 0) = \mathscr{D}(0, 0, 1) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_3 + \beta_2 + \gamma & = & 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient alors la forme demandée

$$pYZ + qZX + rXY = 0,$$

avec $p = \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3$, $q = -\alpha_3$ et $r = -\alpha_1$ $\square$

Théorème 3 (p.52)**.** *Soient A, B, C, D, E cinq points deux à deux distincts du plan. Alors il existe une conique passant par ces cinq points. De plus, s'il n'existe pas parmi ces cinq points quatre points alignés, alors cette conique est unique.*

Preuve :

1er cas : Si quatre de ces points sont alignés sur une droite Δ, alors tout conique réunion de Δ et d'une droite contenant le cinquième point convient (il n'y a pas unicité de la conique).

2e cas : Supposons qu'il n'existe pas quatre points alignés parmi A, B, C, D et E. Il existe alors trois points qui forment un triangle non aplati (sinon les 5 points seraient alignés). Quitte à renommer les points, supposons ce triangle est ABC et prenons le comme triangle de référence de notre repère barycentrique. Notons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques respectives de D et E. Par le lemme, une conique $\mathscr{C}$ passe donc par ces cinq points si et seulement si elle a une équation de la forme $pYZ + qZX + RXY = 0$ où (p, q, r) est solution du système linéaire homogène

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} py_1z_1 + qz_1x_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qz_2x_2 + rx_2y_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2. En effet, s'il était de rang 0 ou 1, alors les trois mineurs d'ordre 2 seraient nuls, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1x_2(z_1y_2 - z_2y_1) = 0 \\ \delta_2 = y_1y_2(x_1z_2 - z_1x_2) = 0 \\ \delta_3 = z_1z_2(y_1x_2 - y_2x_1) = 0 \end{cases}$$

1er sous-cas : $D \notin (BC)$ et $E \notin (BC)$. Alors $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$. Ainsi, $\delta_1 = 0$ si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si tel était le cas, A, D et E seraient alignés. Et alors $\delta_2 \neq 0$. En effet, si $y_1 = 0$, alors A, C, D et E sont alignés, impossible. De même si $y_2 = 0$, alors A, C, D et E sont alignés, impossible. Enfin, si $x_2z_1 - x_1z_2 = 0$, alors

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

et donc B, D, E sont alignés mais alors A, B, D et E seraient alignés, impossible. Ainsi, $\delta_2 \neq 0$.

2eme sous-cas : $D \in (BC)$ ou $E \in (BC)$. Quitte à renommer D et E, on peut supposer $D \in (BC)$. On a alors $x_1 = 0$, et donc $x_2 \neq 0$ car $E \notin (BC)$ (E, B, C, D sont non alignés). Aussi, $y_1 \neq 0$ et $z_1 \neq 0$ (car sinon $D = C$ ou $D = B$). Donc $y_1z_1 \neq 0$. On a alors :

$$\begin{cases} \delta_2 = -y_1y_2z_1x_2 \\ \delta_3 = z_1z_2y_1x_2 \end{cases}$$

et $\delta_2 = \delta_3 = 0 \iff y_2 = z_2 = 0 \iff E = A$, ce qui et exclu. Donc $\delta_2 \neq 0$ ou $\delta_3 \neq 0$.

En conclusion, dans tous les cas le système $(\mathscr{S})$ est de rang 2 et l'ensemble des solutions est une droite vectorielle (par le théorème du rang). Les équations des coniques obtenues sont toutes proportionnelles, ce qui garantit l'unicité de la conique $\mathscr{C}$ passant par les 5 points. $\square$